일차 방정식의 개수와 미지수의 관계
- 행렬의 관점으로

Siwon Yun

November 19, 2023

Abstract

본 보고서는 진로 교과의 독서 주제 탐구 활동을 위한 보고서이다. 책 '선형대수와 군'(이인석. 선형대수와 군 / 李仁碩 저. (2005). Print.) – reference는 해당 책 뿐이므로 위와 같이 간단히 표기한다 – 의 일부를 일고 작성되었다. 해당 책에서 소개된 일차 방정식의 개수와 미지수의 관계와 관련된 명제를 정리하며 보고서가 전개된다. 결과적으로, 본 보고서는 행렬 곱 및 까지의 내용을 다룬다.

1 서론 (배경)

중, 고등학교를 다니며 내가 풀게된 모든 문제는 서로 다른 일차 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 클 경우 필연적으로 미지수를 구할 수 있음에, 또는 특수한 상황에서 가능한 해결 방법(구속 조건)에 기반하였다. 첫 조건에 대한 증명은 간단하지만 책을 읽으며 행렬에 대하여 이는 중요한 역할을 함을 알게 되었다. 또한, 첫 보고서이기에 보다 이해(및 설명)가 간단한 명제를 설정하고자 하였다. 실제로 소개할 명제는 매우 간단하다.– 책의 저자는 본 명제를 '중학생도 이해할 수 있는 수준'이라고 소개한다 – 필자는 본 보고서를 작성하며 보다 TEX에 익숙해지며, 선형대수의 표현법 – '선형대수의 표현법'이라는 표현이 부적합할 수 있으나, 자명하다 생각한 점을 잠시 잊고 제공된 정의를 통해 기존 자명하다 여긴 정리를 증명하는 것을 말한다 – 을 익히는데 의의를 둔다.

2 본론

2.1 책에서의 명제 소개

본 보고서는 책에서 등장하는 특정 명제에 대한 소개 및 증명을 역으로 추적하며 내용을 정리한다. 소개할 명제는 '행렬과 GAUSS 소거법' 章에서 등장하는데, 이 점은 다항식이 아닌 일차 방정식과 관련하여 이야기하는 이유를 설명한다(분명 행렬은 다항식보다 일차 방정식과의 관계가 두드러짐).

명제 2.1: p.17, 명제 1.2.6

만약 $m < n$이면 – 즉, 식의 개수보다 미지수의 개수가 더 많으면 – $(*)AX = 0$은 언제나 non-trivial을 갖는다.

본 명제에는 정의되지 않은(e.g. m, n) 문자가 존재한다. 이유는 책 중간서 등장하는 명제이기 때문이며, 본 보고서에서 소개한다.

2.2 행렬과 1–차 연립 방정식의 관계

아래에 독립된 미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대한 1–차 연립방정식이 있다

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_m \end{cases} \qquad (a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

1−차 연립방정식은 행렬로 표현이 가능하다. 행렬로 표기하기 전 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 X로, $b_1, b_2, \cdots, b_m$을 B로 묶어 행렬로 표현한다.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

a_{ij}의 경우 행렬 $A = (a_{ij})$로 표현한다. 새로 정의한 행렬을 통해 식 (1)을 표현하면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$AX = B \tag{4}$$

B를 0 − 모든 원소의 값이 0인 행렬은 그저 0으로 표기한다 − 으로 설정하면 명제의 $AX = 0$과 같은 표현이 된다. AX가 식 (1)의 각 방정식의 좌항과 같은 이유가 의아할 수 있는데, 이는 행렬 곱셈의 정의 때문이다. 다음 節에서 행렬 곱에 대하여 간단히 설명한다.

2.3 행렬 곱

곱할 두개의 행렬 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$과 두 행렬을 곱한 값인 행렬 $AB = C = (c_{ij})$가 있다. 또한 $A \in \mathbb{R}^{(m\times k)}, B \in \mathbb{R}^{(k\times n)}$을 만족한다. − 이를 만족하지 않을 경우 행렬 곱은 불가하다. 즉, 행렬 곱은 교환 법칙을 성립하지 아니한다. − 행렬 곱의 정의는 다음과 같다.

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} \tag{5}$$

$A \in \mathbb{R}^{(m\times k)}, B \in \mathbb{R}^{(k\times n)}$일 때, $C \in \mathbb{R}^{(m\times n)}$ 본 정의를 통해 $AX = B$이 식 (1)을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{gathered} AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \because AX = B \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{6}$$

명제의 경우 위 식($AX = B$)에서 B에 해당하는 부분은 0이다. 이제, 명제에서 등장하는 생소한 단어는 오직 'non-trivial'뿐이다.
non-trivial에 대하여 소개하기 앞서, − 행렬 곱에 대하여 여기서 끝내기 아쉬우니 − 행렬 곱은 결합법칙과 분배 법칙이 성립함을 증명한다.

2.3.1 결합 법칙

우선, 결합 법칙이 우리 뇌리에 얼마나 깊이 박혀있는지 고민해보자. 우리는 실수 $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$에 대하여 $A \times (B \times C)$를 간단히 ABC와 같이 표현한다. 비단, 결합 법칙이 성립하지 않을 경우 − 다르게 표현하면, $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ − 이와 같은 표현이 불가하다. 기존과 같은 편리한 표현을 사용하기 위해, 행렬 곱의 정의에서 언급되지 아니한 결합 법칙을 증명할 필요가 있다.

행렬 곱에서 결합 법칙이 성립할 경우, 행렬 $A \in \mathbb{R}^{(m \times k_1)}, B \in \mathbb{R}^{(k_1 \times k_2)}, C \in \mathbb{R}^{(k_2 \times n)}$에 대하여 다음을 만족한다. 편의를 위하여, 앞서 행렬 곱의 정의를 설명하며 사용한 표현과 같이, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$로 표현한다.

$$A(BC) = (AB)C \tag{7}$$

좌항과 우항에 대하여 다음을 만족한다. 추가로 행렬 $A(BC)$의 i번째 행 j번째 열의 원소는 $[A(BC)]_{ij}$와 같이 표현하였다.

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k_1} a_{ik_1} \left(\sum_{k_2} b_{k_1 k_2} c_{k_2 j} \right) \tag{8}$$

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k_2} \left(\sum_{k_1} a_{ik_1} b_{k_1 k_2} \right) c_{k_2 j} \tag{9}$$

'수학 1'에서 배운 내용을 되세겨 보면 좌항과 우항 모두 다음과 같이 표현 가능함을 알 수 있다.

$$\sum_{k_2} \sum_{k_1} a_{ik_1} b_{k_1 k_2} c_{k_2 j} \tag{10}$$

좌항과 우항이 동일하므로, 결합 법칙은 성립한다.

2.3.2 분배 법칙

행렬 곱에서 분배 법칙이 성립할 경우, 행렬 $A \in \mathbb{R}^{(m \times k)}, B \in \mathbb{R}^{(m \times k)}, C \in (ㄱ \times ㅆ)$에 대하여 다음을 만족한다. – 이제 $A = (a_{ij})$는 당연하게 여긴다. 참고 서적 필자가 자주하는 말, '종이를 아끼자' –

$$(A + B)C = AC + BC \tag{11}$$

행렬의 덧셈은 대응하는 각 원소에 대하여 계산된다. 이러한 계산을 element-wise operation라고 한다. 따라서 행렬의 덧셈은 행렬의 모양이 같을 때 가능하다. 위 식의 좌항과 우항은 각각 다음과 같다.

$$[(A + B)C]_{ij} = \sum_{k} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \tag{12}$$

$$[AC + BC]_{ij} = \sum_{k} (a_{jk} c_{kj} + b_{ik} c_{kj}) \tag{13}$$

이 또한 '수학 1'의 내용에 의해 좌항과 우항이 동일하므로, 분배 법칙은 성립한다.
다음 節에서는 non-trivial에 대하여 이야기한다.

2.4 $AX = 0$의 해

앞서 살펴본, 행렬로 이루어진 식 $AX = B$는 방정식이며, 해(solution)를 구하는 것은 분명 중요 문제이다. 하나의 행렬도 다양한 값을 포함하기에 위와 같은 방정식의 해를 구하는 것은 간단하지 않은데, 대표적인 해를 구하는 알고리즘은 GAUSS 소거법이다. – 서론서 언급한 바와 같이, 본 보고서에서 소개하는 명제는 참고 서적의 '행렬과 GAUSS 소거법' 章에 위치한다. –
본 보고서에서 다루는 명제에 등장하는 방정식 $AX = 0$의 경우 필연적으로 해(0)를 가지며 이를 trivial solution이라 한다. 모든 원소가 0인 행렬은 일반적으로 0으로 표현하며, trivial solution을 행렬 및 연립방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{gathered} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \\ x_1 = 0, x_2 = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

위 예시서 $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^t$인 경우 또한 방정식을 만족한다. 이와 같은 해를 non-trivial solution이라 한다.

2.5 명제 해설

이제 우리는 명제의 모든 키워드를 알고 있다. 각 행렬은 $A \in \mathbb{R}^{(m\times n)}, B \in \mathbb{R}^{(n\times 1)}$이다. 식의 개수는 m개이며, 미지수$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$는 n개이다. 명제는 식의 개수보다 미지수의 개수가 많을 경우 $AX = 0$에서 non-trivial solution, 즉 0이 아닌 해를 가진다고 한다. 사실 증명은 굉장히 간단하다. 참고 서적에서는 2가지의 증명 방법을 소개하는데, 본 보고서에서 – 분량상 – gaussian 소거법을 소개하지 않으므로, 더욱 간단한 방법을 사용하였다. 모든 a_{ij}가 0일 경우 증명은 너무 자명하므로 a_{ij} 중 0이 아닌 값이 있다고 가정하며, 0이 아닌 a_{ij}값 만을 생각한다. 0이 아닌 것에 대하여 새로운 번호를 부여하는 셈이다.

2.5.1 $m = 1$인 경우

$m = 1$이면, 즉 식이 1개인 경우에 대하여 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{16}$$

$1 \leq k \leq n$을 만족하는 k에 대하여 $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = -(x_{k+1} + \cdots + a_nx_n)$을 만족하는 수는 필연 존재한다. $m = 1$인 경우에 대한 명제 증명 끝.

2.5.2 $m < 1$인 경우

$m < 1$인 경우, 즉 식의 개수가 여러개인 경우에는 다음과 같이 증명 가능하다.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \tag{17}$$
$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \tag{18}$$

x_1에 식 (18)을 대입하면 식 (17)은 0이 된다. 1번 행에서 구한 x_1을 다른 행에 대입한다. 대입하는 행은 편히 i번째 행으로 설정하였다.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \tag{19}$$
$$a_{i1}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \tag{20}$$

식 (20)은 미지수의 개수는 $n - 1$이며, 식의 개수는 $m - 1$이다. 조건 $m < n$에 근거하여 $m - 1 < n - 1$을 만족한다. 위 과정을 $m - 1$번 반복하면 식의 개수는 1개, 미지수의 개수는 $n - m + 1$개가 된다. 이는 2.5.1와 동일한 상황이다.

Contents