미분에 대한 고찰과 컴퓨터에서의 응용

- 터미널에서 cp한다는걸 mv해서 원본이 날라가고 남아있는 자료로 복구했습니다...-

Siwon Yun

KDMHS - 21wp

March 14, 2024

Contents

이야기를 시작하기 전에

다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$는?

$$y^2 + 4x = 0 \tag{1}$$

이야기를 시작하기 전에

다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$는?

$$y^2 + 4x = 0 \tag{1}$$

$$\Longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{y}$$

이야기를 시작하기 전에

다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$는?

$$y^2 + 4x = 0 \tag{1}$$

$$\Longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{y}$$

식 $y^2 + 4x$에서 $\frac{dy}{dx}$는?

이야기를 시작하기 전에

다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$는?

$$y^2 + 4x = 0 \tag{1}$$

$$\Longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{y}$$

식 $y^2 + 4x$에서 $\frac{dy}{dx}$는?

????

컴퓨터에서의 미분

컴퓨터에서 훌륭히 미분하는 방법에 대하여...

컴퓨터에서의 미분

컴퓨터에서 훌륭히 미분하는 방법에 대하여...

- horner's method: 국말로 조립제법

컴퓨터에서의 미분

컴퓨터에서 훌륭히 미분하는 방법에 대하여...

- horner's method: 국말로 조립제법
- 자동 미분

컴퓨터에서의 미분

컴퓨터에서 훌륭히 미분하는 방법에 대하여...

- horner's method: 국말로 조립제법
- 자동 미분
- interpolate function을 활용한 테일러 급수

horner's method

선형 결합된 식 $p(x)$에 대하여...

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n \tag{2}$$

horner's method

선형 결합된 식 $p(x)$에 대하여...

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n \tag{2}$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(\cdots + x(a_{n-1} + x a_n)))))$$

horner's method

선형 결합된 식 $p(x)$에 대하여...

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n \tag{2}$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(\cdots + x(a_{n-1} + xa_n)))))$$

If $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$... $p(3) = 82,\ p'(3) = 72,\ p''(3) = 42$

horner's method

선형 결합된 식 $p(x)$에 대하여...

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n \tag{2}$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(\cdots + x(a_{n-1} + x a_n)))))$$

If $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$... $p(3) = 82,\ p'(3) = 72,\ p''(3) = 42$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & & 6 & 27 & 81 \\ \hline & 2 & 9 & 27 & 82 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & 9 & 27 \\ 3 & & 6 & 45 \\ \hline & 2 & 15 & 72 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 2 & 15 \\ 3 & & 6 \\ \hline & 2 & 21 \end{array}$$

horner's method

선형 결합된 식 $p(x)$에 대하여...

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n \tag{2}$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(\cdots + x(a_{n-1} + xa_n)))))$$

If $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$... $p(3) = 82,\ p'(3) = 72,\ p''(3) = 42$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & & 6 & 27 & 81 \\ \hline & 2 & 9 & 27 & 82 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & 9 & 27 \\ 3 & & 6 & 45 \\ \hline & 2 & 15 & 72 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 2 & 15 \\ 3 & & 6 \\ \hline & 2 & 21 \end{array}$$

1ㅊㅏ 미분까지만 하기로...

자동 미분

아래 미분값을 어떻게 계산해야 효율적? a, b는 중간 변수

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\frac{da}{db}\frac{db}{dx} \tag{3}$$

자동 미분

아래 미분값을 어떻게 계산해야 효율적? a, b는 중간 변수

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\frac{da}{db}\frac{db}{dx} \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{da}\frac{da}{db}\right)\frac{db}{dx} \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\left(\frac{da}{db}\frac{db}{dx}\right) \tag{5}$$

자동 미분

아래 미분값을 어떻게 계산해야 효율적? a, b는 중간 변수

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\frac{da}{db}\frac{db}{dx} \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{da}\frac{da}{db}\right)\frac{db}{dx} \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\left(\frac{da}{db}\frac{db}{dx}\right) \tag{5}$$

식 (4)는 역방향, 식 (5)는 정방향
역방향 계산이 더 효율적, 이를 이용한 것이 자동 미분

자동 미분서 등장한 식 하나

$f = a + b$, a와 b는 c로 구성된 식

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial c} \tag{6}$$

자동 미분서 등장한 식 하나

$f = a + b$, a와 b는 c로 구성된 식

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial c} \tag{6}$$

분명 올바른 식이지만 수식만을 보면 어색함. 아래는 잘못된 식, 그러나 경험을 대변하는

$$\begin{aligned}
&a = c\\
&b = c\\
&f = a + b = 2c\\
&leftport : \frac{\partial(2c)}{\partial c} = 2\\
&rightport : \frac{\partial(2c)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial c} + \frac{\partial(2c)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial c} = 4\\
&\Rightarrow 2 = 4 \quad ????
\end{aligned}$$

떠오르는 질문: $a = c$이라면, $c = a$이고, $a = c$일까?

떠오르는 질문: $a = c$이라면, $c = a$이고, $a = c$일까?

$$\frac{\partial a}{\partial c} = 0 \tag{7}$$

c 입장에서는 a는 상수일 뿐... a는 c로 구성된 수이니...
isomorphism(동형 사상)에서 다른 공간에 존재하는 느낌?

미분 자체가 굉장히 경험에서 벗어나고 기존 배운 수학 과목과 다름

미분 자체가 굉장히 경험에서 벗어나고 기존 배운 수학 과목과 다름

물리에서...

- 온도 차가 있을 때(비가역 연산)
- 부피 변화가 있을 때(가역 연산)

비유컨대, 기존 배운 개념은 가역 연산, 미분은 비가역 연산

미분 자체가 굉장히 경험에서 벗어나고 기존 배운 수학 과목과 다름

물리에서...

- 온도 차가 있을 때(비가역 연산)
- 부피 변화가 있을 때(가역 연산)

비유컨대, 기존 배운 개념은 가역 연산, 미분은 비가역 연산

$$\frac{d\left(x^2+3x+2\right)}{dx} = 2x+3 \tag{8}$$

$$\int (2x+3)dx = x^2+3x+(Constant) \tag{9}$$

미분 자체가 굉장히 경험에서 벗어나고 기존 배운 수학 과목과 다름

물리에서...

- 온도 차가 있을 때(비가역 연산)
- 부피 변화가 있을 때(가역 연산)

비유컨대, 기존 배운 개념은 가역 연산, 미분은 비가역 연산

$$\frac{d\left(x^2+3x+2\right)}{dx}=2x+3 \tag{8}$$

$$\int(2x+3)dx=x^2+3x+(Constant) \tag{9}$$

미분 결과 y절편에 대한 정보가 손실 돼...

다시 돌아가면...

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial c} \tag{10}$$

이제 어느 정도 받아들일 수 있을까?

다시 돌아가면...

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial c} \tag{10}$$

이제 어느 정도 받아들일 수 있을까?

미분의 시작은 뉴턴이 물리를 새로운 언어로 표현하기 위해...
어쩌면, 수식으로 이해하는 것이 아닐 수도...

interpolation(보간법)

데이터를 통해 함수를 찾는 것은 선형 예측자를 가진 인공지능의 꿈
비단 이전에 공학의 꿎

interpolation(보간법)

데이터를 통해 함수를 찾는 것은 선형 예측자를 가진 인공지능의 꿈
비단 이전에 공학의 꿏

공학적, 수치해석학적 관점: 관측된 데이터는 오염되어 있음
즉, $\hat{y} = y + \epsilon$

interpolation(보간법)

데이터를 통해 함수를 찾는 것은 선형 예측자를 가진 인공지능의 꿈
비단 이전에 공학의 꿏

공학적, 수치해석학적 관점: 관측된 데이터는 오염되어 있음
즉, $\hat{y} = y + \epsilon$

정확한 값 필요 없음. 근사한 값을 구하고, 계산이 간편한 값을 사용하자!

관측값 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$이 주어졌을 때, 실제 이 현상과 관련된 함수를 $f(x)$라 정의하고 미분 가능하다 가정하자 (즉, $f(x_i) = y_i - \epsilon$)

관측값 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$이 주어졌을 때, 실제 이 현상과 관련된 함수를 $f(x)$라 정의하고 미분 가능하다 가정하자 (즉, $f(x_i) = y_i - \epsilon$)

$f(x)$와 차이가 있을 수 있겠지만, 관측값을 잘 표현하는 함수 $p(x)$를 찾아보자
$0 \leq i < n, i \in \mathbb{N}$에 대하여 $p(x_i) = y_i$이면 p는 관측값을 interpolate한다

관측값 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$이 주어졌을 때, 실제 이 현상과 관련된 함수를 $f(x)$라 정의하고 미분 가능하다 가정하자 (즉, $f(x_i) = y_i - \epsilon$)

$f(x)$와 차이가 있을 수 있겠지만, 관측값을 잘 표현하는 함수 $p(x)$를 찾아보자
$0 \leq i < n, i \in \mathbb{N}$에 대하여 $p(x_i) = y_i$이면 p는 관측값을 interpolate한다

라그랑주 형태:
크로네커 델타($\delta_{ij} \Rightarrow \ell_i(x)$)를 활용하면...

$$p_n x = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) f(x_i) \tag{11}$$

관측값 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$이 주어졌을 때, 실제 이 현상과 관련된 함수를 $f(x)$라 정의하고 미분 가능하다 가정하자 (즉, $f(x_i) = y_i - \epsilon$)

$f(x)$와 차이가 있을 수 있겠지만, 관측값을 잘 표현하는 함수 $p(x)$를 찾아보자
$0 \le i < n, i \in \mathbb{N}$에 대하여 $p(x_i) = y_i$이면 p는 관측값을 interpolate한다

라그랑주 형태:
크로네커 델타($\delta_{ij} \Rightarrow \ell_i(x)$)를 활용하면...

$$p_n x = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) f(x_i) \tag{11}$$

$$\ell_i(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} = \prod_{j \neq i,\ j=0}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \tag{12}$$

frame2

$\TeX$ 작업이 힘들어 나머지는 설명과 칠판을 통해...