등차수열, 등비수열, 그리고 등제곱수열

siwon yun

July 12, 2024

0.1 배경

수업 시간에 생긴 의문에 대하여 소개합니다. 이에 앞서, 해당 의문을 발전 시키는데 도움을 준, 작년 물리 시간에 발표한 simulation에 대하여 간략히 소개합니다.

Link: https://www.siwonsw.com/paper/physical-system-dynamic

작년 물리 시간에 발표를 위해 제작한 simulation입니다. Diagram으로 simulation을 표현하는데, diagram은 node로 이루어져 있으며, node는 서로 상호작용합니다. '가속도' node는 'Flow' node에 영향을 주며, 'Flow' node는 '좌표' node에 영향을 줍니다. 시간이 지남에 따라 Flow node에 가속도 값을 더하고, Flow node의 값은 좌표 node에 더해지는 방식으로 시뮬레이션을 구현했습니다.

0.1.1 시행착오

Diagram에서 재미있는 부분은 수레와 추에 각각 존재하는 FLOW node입니다. 이는 가속도 node의 누적값으로 평균 속도를 의미하며 이가 누적되어 좌표를 구합니다. 처음 수레와 추는 정지해 있다고 가정하기에, 별다른 고려 없이 FLOW node값에 각 초에 속도를 대입하였습니다(초기값 0). 그러나, 등가속도 운동서 속도는 시간에 비례하므로, 이는 잘못된 simulation 적용이었습니다. Table 1와 Table 2는 가속도가 5인 경우 각각 FLOW node가 속도와 평균 속도인 경우의 좌표를 나타냅니다.[1] 조건하에, 좌표(위치)는 $\frac{5}{2}t^2$임을 고려하여 Table 2가 올바른 상황임을 알 수 있으므로 FLOW node는 속도가 아닌 평균 속도 값으로 설정해야 합니다. i.e. FLOW node의 초기값은 (가속도)/2로 설정했어야 합니다.

Node \ Time	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
가속도	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Flow: 속도	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
좌표	0	0	5	15	30	50	75	105	140	180	225

Table 1: Flow가 속도인 경우

Node \ Time	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
가속도	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Flow: 평균 속도	5/2	15/2	25/2	35/2	45/2	55/2	65/2	75/2	85/2	95/2	105/2
좌표	0	5/2	10	45/2	40	125/2	90	245/2	160	405/2	225

Table 2: Flow가 Time과 (Time + 1)의 평균 속도인 경우

당시 문제를 발견하고 1/2가 어떤 의미가 있는지 고민하였습니다. 적분은 의미 그대로 쌓아 올리는, 즉 누적을 뜻하는데 원하는 값을 얻기 위해 누적 시 1/2라는 상수 값이 초기값에 영향을 미쳤습니다. 이는 훗날 수업 시간에 생긴 의문을 발전 시키는데 큰 도움을 주었습니다.

0.2 1/2에 대하여

고등학교 수학에서 등장하는 '등차수열'과 '등비수열'은 각각 더하기와 곱하기가 연속된 수열이며, 등차수열 a_n과 등비수열 b_n의 일반항은 다음과 같습니다.

$$a_n = a_1 + d(n-1) \tag{1}$$
$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \tag{2}$$

Equation 1과 Equation 2에서 d와 r은 각각 등차와 공비이며, a_1과 b_1은 첫째 항입니다.

[1] 평균 속도는 Time과 (Time + 1)에서의 평균 속도로 해당 상황서 속도가 일차함수 꼴로 표현됨을 생각하면, (평균 속도) = $({}_{n+1} - {}_{n})/2$

수업을 들으며 생긴 의문 중 하나는 다음과 같습니다: 더하기가 반복된 곱하기와 곱하기가 반복된 제곱을 배웠는데, 왜 제곱이 반복되는 수열은 배우지 않는가?

제곱이 반복되는 수열의 일반항을 구해보면, $c_n = c^{d^{n-1}}$이며 c는 첫째항입니다. 해당 수열의 이름이 존재하는 것 같지 아니하여 '등제곱수열'로 명명하여 표현합니다. 질문의 결론은 고등학교 수학 수열 문제의 핵심인 수열의 합을 통해 어렵지 않게 얻을 수 있었습니다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = n\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_n = b_1\frac{1-r^n}{1-r} \tag{4}$$

Equation 3과 Equation 4는, 등차수열과 등비수열의 첫째항부터 n번째 항까지의 합을 닫힌 형태 (closed form) 로 나타낸 것입니다. 등비수열의 경우 기하급수적으로 합이 증가하여 닫힌 형태로 표현하는 것이 어려워 보이나, 다음과 같이 유도할 수 있습니다.

$$\sum_{k=1}^{n} b_n = b_1 + b_1 \cdot r + b_1 \cdot r^2 + b_1 \cdot r^3 + \cdots + b_1 \cdot r^{n-1} = S_n \tag{5}$$

$$r \cdot S_n = b_1 \cdot r + b_1 \cdot r^2 + b_1 \cdot r^3 + \cdots + b_1 \cdot r^{n-1} + b_1 \cdot r^n \tag{6}$$

$$S_n - r \cdot S_n = b_1 - b_1 \cdot r^n = b_1 \cdot (1 - r^n) \tag{7}$$

$$S_n = b_1\frac{1-r^n}{1-r} \tag{8}$$

양변에 등비를 곱하여 새로운 수열을 만들고 원 수열에 이를 음하여 공통된 부분을 제거하고 닫힌 형태를 유도하였습니다. 비단, 등제곱수열에 경우 이와 같이 닫힌 형태로 표현할 수 없습니다.[2] 따라서, 고등학교 과정에서 해당 수열이 등장하지 않는 이유는 a) 문제를 제작하기 위해 조건을 식에 숨겨야 하는데, 이를 위해서는 공식화된 형태(수열의 합)가 필요하기 때문 b) 지수에 지수가 존재하는 경우는 수능 미적분 이전에 등장하기 않기 때문이라고 생각합니다.

새로운 의문이 들었는데, 직관에 의존하는 이 의문은 다음과 같습니다: 첫째항에 어떤 수를 대입하는 것이 자연스러울까?

등차수열과 등비수열의 첫째항에 각각 등차와 등비를 대입하면, 수열의 특성이 부각됩니다.

$$a_n = d + d(n-1) = d \cdot n \tag{9}$$

$$b_n = r \cdot r^{n-1} = r^n \tag{10}$$

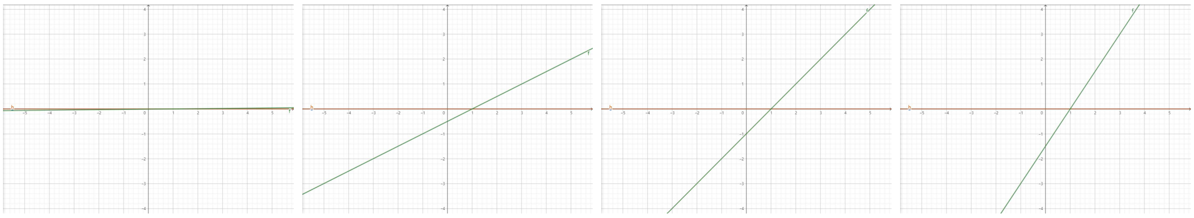
비단, 자동차가 등속도 운동을 하고 있는 상황을 생각해 봅시다. 자동차의 위치를 등차수열로 표현할 때, 첫째항이 등차로 설정되는 것보다는 0으로 설정하는 것이 자연스럽습니다. 이와 같은 논리로, 등비수열의 첫째항을 1로 설정하는 것이 자연스럽습니다. — 첫째항이 0일 경우 모든 항은 0입니다. — 0은 보다 특별한 수이며, 1은 unit입니다. 그렇다면, 해당 논리에 따라 등제곱수열의 첫째항은 어떤 수로 설정하는 것이 자연스러울까요? $c^{d^{n-1}}$에서 첫째항 c에 0을 대입하면 모든 항이 0이며, 1을 대입하면 모든 항이 1입니다. 따라서 떠올린 숫자가 1/2이였습니다. Subsection 0.1.1에서 언급한 바와 같이 초기값에 1/2라는 값이 영향을 미쳤다는 점, Table의 Flow node 또한 수열이라는 점, 그리고 x를 x에 대하여 적분하면 $\frac{1}{2}x^2$이며 1/2라는 상수가 생긴다는 점에서 상수 1/2는 특별한 수라고 느꼈습니다. 1/2를 등제곱수열 첫째항에 대입하여, 재미난 시각적 결과 — 수치적이지 아니하고 직관적인 — 를 얻을 수 있었습니다.

등차수열, 등비수열, 그리고 등제곱수열을 함수로 표현하고 x축을 n의 값, y축을 수열의 값으로 설정하여 graph를 그립니다. 각각은 초록, 파랑, 주황색 선으로 표현하며, 첫째항은 a로 표현합니다. a가 0, 1, 1/2인

[2] 등비를 곱한 것처럼, d를 제곱하면 공통된 부분이 생기는 새로운 수열을 만들 수 있지만 좌항이 $S_n - (S_n)^d$꼴이 됩니다. 이를 S_n에 대하여 묶어 표현할 수 없습니다.

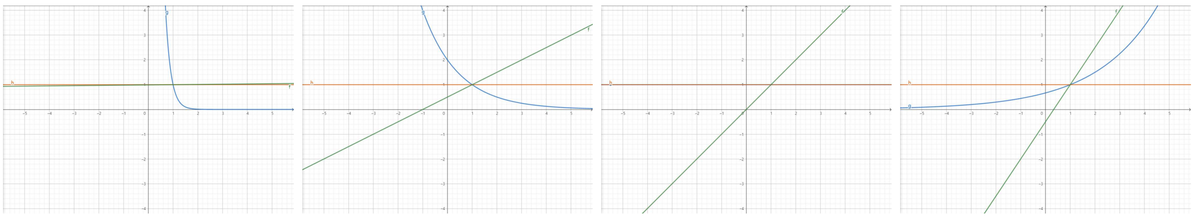
각각의 상황에서 d가 0.01, 0.5, 1, 1.5인 경우를 Figure 1, Figure 2, Figure 3에 나타냈습니다. d가 0인 경우가 아닌 0.01인 경우를 표현한 이유는 d가 0인 경우 정의되지 아니한 부분이 생기기 때문입니다. 각 수열을 함수로 표현하면 다음과 같습니다:

- 초록선: $y = f(x) = a + d(x-1)$: 등차수열
- 파랑선: $y = g(x) = a \cdot d^{x-1}$: 등비수열
- 주황선: $y = h(x) = a \cdot a^{d^{x-1}}$: 등제곱수열



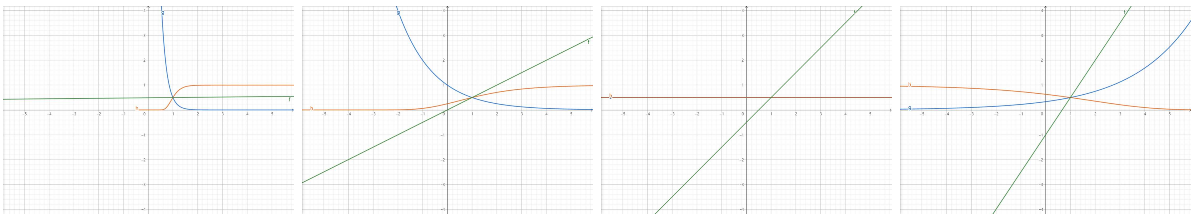
(a) $d = 0.01$ (b) $d = 0.5$ (c) $d = 1$ (d) $d = 1.5$

Figure 1: $a = 0$



(a) $d = 0.01$ (b) $d = 0.5$ (c) $d = 1$ (d) $d = 1.5$

Figure 2: $a = 1$



(a) $d = 0.01$ (b) $d = 0.5$ (c) $d = 1$ (d) $d = 1.5$

Figure 3: $a = 1/2$

편의를 위하여, $f(x)$를 등차함수, $g(x)$를 등비함수, $h(x)$를 등제곱함수라고 명명합니다.

$a = 0$인 경우, d의 값이 등차함수값 기울기에 영향을 미치지만, 등비함수와 등제곱함수에는 영향을 미치지 않습니다. 등비함수와 등제곱함수 모두 $y = 0$꼴로 d, x값에 상관 없이 동일한 함수값을 보입니다. 세 함수는 점 $(1, 0)$에서 교차합니다.

$a = 1$인 경우, 등차함수와 등비함수는 d의 값에 따라 함수값이 변하지만, 등제곱함수는 d의 값에 영향을 받지 않습니다. 등제곱함수는 $y = 1$꼴로 d, x값에 상관 없이 동일한 함수값을 보입니다. 세 함수는 점 $(1, 1)$에서 교차합니다.

$a = 1/2$인 경우, 등제곱함수 또한 d, x값에 따라 함수값이 변합니다. 세 함수는 점 $(1, 1/2)$에서 교차하며, 등제곱함수는 마치 $(1, 1/2)$에 대하여 점대칭인 것처럼 보입니다.[3] $0 < a \leq 1$, $0 < d < 1$인 경우 $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$이며, $0 < a \leq 1$, $1 < d$인 경우 $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$

[3] 실제 값은 대칭은 아닙니다.

임을 고려하면, $a = 1/2$인 경우가 가장 자연스러운 값이라고 생각합니다.